

## TREĆI DOMAĆI ZADATAK IZ PREDMETA ALGEBRA

1. Neka je  $A \trianglelefteq G$ ,  $B \trianglelefteq H$ . Dokazati da je  $A \times B \trianglelefteq G \times H$ .
2. Dokazati da je  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$  polje (sa operacijama sabiranja i množenja realnih brojeva).
3. Pokazati da polje  $\mathbb{Q}$  ima samo trivijalne ideale ( $\{0\}$  i  $\mathbb{Q}$ ) i na primjer homomorfizma  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = x$ , pokazati da homomorfna slika ideala ne mora biti ideal.
4.
  - a) Dokazati da je polinom  $p(x) = x^4 + 3x + 6$  nesvodljiv u  $\mathbb{Q}$ .
  - b) Neka je  $I = \langle p(x) \rangle$ . Dokazati da je  $R = \mathbb{Q}[x]/I$  polje.
  - c) Neka je  $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 4$ . Odrediti multiplikativni inverz za  $q(x) + I$  u  $R$ .